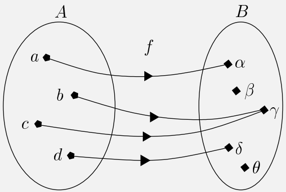
Generalidades sobre funções

Definição

Chamamos **função** *a dois conjuntos não vazios, X e Y, munidos de uma lei de formação ou regra de correspondência, f, que a cada elemento x de X associa um único elemento $f(x)$ de Y. Em geral denotamos a função por $f : X \longrightarrow Y$.*

Usa-se a notação $x \longmapsto f(x)$ para indicar que o elemento x é enviado por f em $f(x)$ ou que f faz corresponder a x o elemento $f(x)$.



Definição

Dados os conjuntos X e Y e a função $f : X \longrightarrow Y$, designa-se:

- *o conjunto X por* **domínio** *da função e denota-se por* $\mathrm{Dom}(f)$;
- *o conjunto $f(X) = \mathrm{Im}\,(f) = \{f(x) : x \in X\}$ por* **contradomínio** *ou* **imagem** *da função;*
- *os elementos x de X por* **objetos**;
- *os elementos $f(x)$ tais que $x \in X$ por* **imagens**;
- *o conjunto $\mathrm{Gr}\,(f) = \{(x, y) \in X \times Y : \; y = f(x)\}$ por* **gráfico de f**.

Definição

Dados uma função $f : X \longrightarrow Y$, *um subconjunto* A *de* X, *e um subconjunto* B *de* Y, *denomina-se por:*

- **imagem de A por f** *ou* $f(A)$ *o conjunto* $\{f(x) : x \in A\}$;
- **imagem recíproca de B por f** *ou* $f^{-1}(B)$ *o conjunto* $\{x \in X : f(x) \in B\}$.

Definição

Uma função $f : X \longrightarrow Y$ *diz-se:*

- **injetiva** *se* $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$;
- **sobrejetiva** *se* $\forall\, y \in Y\ \exists\, x \in X : \quad f(x) = y$;
- **bijetiva** *se for simultaneamente injetiva e sobrejetiva.*

Definição

Dadas duas funções $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow W$, *define-se a* **função g composta com f** *(escreve-se* $g \circ f$ *) do seguinte modo:*

$$\begin{array}{rccc} g \circ f : & X & \longrightarrow & W \\ & x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & Y \arrow[r, "g"] & W \end{tikzcd}$$

Definição

Define-se $\mathrm{Id}_X : X \longrightarrow X$ *e designa-se* **função identidade (em $\boldsymbol{X}$)**, *a função tal que* $\mathrm{Id}_X(x) = x, \forall\, x \in X$.

Definição

Dada uma função $f : X \longrightarrow Y$, *uma função* $g : Y \longrightarrow X$ *diz-se* **inversa de $\boldsymbol{f}$** *se* $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$ *e* $g \circ f = \mathrm{Id}_X$. *Uma função que admite inversa diz-se* **invertível**.

Nota

Facilmente se verifica que se $f : X \longrightarrow Y$ *é invertível, a sua inversa é única. Podemos então denotar a função inversa de* f *por* $f^{-1} : Y \longrightarrow X$. *Observe-se que* f^{-1} *é invertível e que* $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

Proposição

Uma função $f : X \longrightarrow Y$ *é invertível se e só se é bijetiva.*

Nota

Se uma função $f : X \longrightarrow Y$ real de variável real é injetiva mas não sobrejetiva, é usual falar da inversa de f. Na realidade, cometemos um abuso de notação, chamando ainda f à função bijetiva que se obtém substituindo Y pelo contradomínio de f.

Definição

Sejam $f : X \longrightarrow Y$ e $g : A \longrightarrow Y$, funções tais que $A \subseteq X$ e $g(x) = f(x), \forall\, x \in A$. A função g diz-se uma **restrição** *de f e denota-se $g = f_{|_A}$. A função f diz-se um* **prolongamento** *de g.*

Funções reais de variável real

Definição

Chamamos **função real de variável real** *a uma função* $f : X \longrightarrow Y$*, em que* X *e* Y *são subconjuntos não vazios de* $\mathbb{R}$*.*

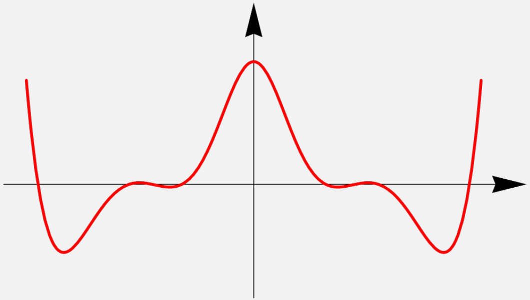
Definição

Dado um subconjunto X*, não vazio, de* $\mathbb{R}$*, diz-se que* $\boldsymbol{X}$ **é simétrico relativamente a** $\mathbf{0}$ *se* $X = -X = \{-x : x \in X\}$.

Definição

Seja $f : X \longrightarrow Y$ *uma função. Diz-se que:*

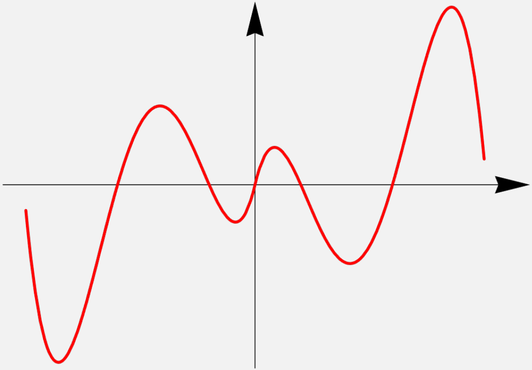
- $\boldsymbol{f}$ **é uma função par** *se* X *é simétrico relativamente a* 0 *e* $\forall\, x \in X\ f(-x) = f(x)$.



Definição

Seja $f : X \longrightarrow Y$ *uma função. Diz-se que:*

- $\boldsymbol{f}$ **é uma função ímpar** *se* X *é simétrico relativamente a* 0 *e* $\forall\, x \in X \;\; f(-x) = -f(x)$.



Definição

Dadas duas funções $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$, define-se

- **soma de f e g:**

$$\begin{array}{rccc} f+g: & X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x)+g(x) \end{array}$$

- **produto de f e g:**

$$\begin{array}{rccc} fg: & X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x)g(x) \end{array}$$

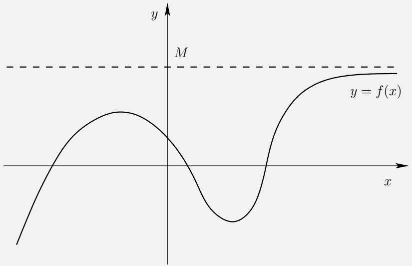
- **quociente de f e g** (*supondo que* $g(x) \neq 0, \quad \forall\, x \in X$)**:**

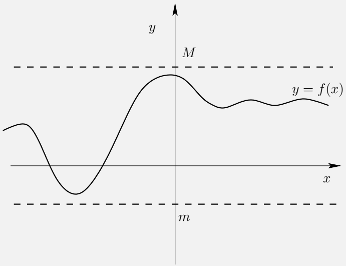
$$\begin{array}{rccc} \frac{f}{g}: & X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{f(x)}{g(x)} \end{array}$$

Definição

Dada uma função $f : X \longrightarrow Y$, diz-se que

- $\boldsymbol{f}$ *é* **majorada** *se* $\quad \exists\, M \in \mathbb{R}\ \forall\, x \in X \qquad f(x) \le M$;
- $\boldsymbol{f}$ *é* **minorada** *se* $\quad \exists\, m \in \mathbb{R}\ \forall\, x \in X \qquad m \le f(x)$;
- $\boldsymbol{f}$ *é* **limitada** *se f é majorada e minorada.*





Definição

Uma função $f : X \longrightarrow Y$ diz-se

- **estritamente crescente** *se*
$$\forall x_1, x_2 \in X \qquad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2);$$
- **crescente** *se* $\forall x_1, x_2 \in X \qquad x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2);$
- **estritamente decrescente** *se*
$$\forall x_1, x_2 \in X \qquad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2);$$
- **decrescente** *se* $\forall x_1, x_2 \in X \qquad x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2);$
- **monótona** *se for crescente ou decrescente;*
- **estritamente monótona** *se for estritamente crescente ou estritamente decrescente.*

Definição

Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma função. Um ponto $x_0 \in X$ diz-se

- *um* **ponto de máximo local** *ou* **maximizante local** *de f se*

$$\exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in \,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\, \cap X \qquad f(x) \leq f(x_0)$$

  e $f(x_0)$ diz-se **máximo local** *de f;*

- *um* **ponto de mínimo local** *ou* **minimizante local** *de f se*

$$\exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in \,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\, \cap X \qquad f(x_0) \leq f(x)$$

  e $f(x_0)$ diz-se **mínimo local** *de f;*

- *um* **ponto de máximo local estrito** *de* f *se*

$$\exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in\ ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap X \setminus \{x_0\} \quad f(x) < f(x_0)$$

  e $f(x_0)$ *diz-se* **máximo local estrito** *de* f*;*

- *um* **ponto de mínimo local estrito** *de* f *se*

$$\exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in\ ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap X \setminus \{x_0\} \quad f(x_0) < f(x)$$

  e $f(x_0)$ *diz-se* **mínimo local estrito** *de* f*;*

- *um* **ponto de máximo absoluto** *ou* **maximizante absoluto** *de f se*

$$\forall\, x \in X \qquad f(x) \leq f(x_0),$$

e $f(x_0)$ *diz-se* **máximo absoluto** *de f ;*

- *um* **ponto de mínimo absoluto** *ou* **minimizante absoluto** *de f) se*

$$\forall\, x \in X \qquad f(x_0) \leq f(x),$$

e $f(x_0)$ *diz-se* **mínimo absoluto** *de f;*

- *um* **ponto de extremo (local ou absoluto)** *se for ponto de máximo ou de mínimo (local ou absoluto) de f.*

Nota

A partir de uma representação gráfica de uma função real de variável real bijetiva f, podemos obter uma representação gráfica de f^{-1}, procedendo como se indica na figura seguinte: