

Exercício 2.1 Mostre, recorrendo à definição, que:

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} (x+y) = 1;$

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$

Exercício 2.2 Mostre que:

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = 0;$

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0;$

Exercício 2.3 Calcule, caso exista, cada um dos seguintes limites:

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} x^3y;$

f) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{y^2-x^2}{x-y};$

k) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3y}{x^2+y^2} + x;$

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{xy}}{x+1};$

g) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{sen}(xy)}{xy};$

l) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2}{x^2-y^2};$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2, e^x);$

h) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2};$

m) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^5}{x^2+y^4};$

d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{\cos x}{x^2+y^2+1}, e^{x^2} \right);$

i) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2};$

n) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{x^2y^2};$

e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2+2};$

j) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2};$

o) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (-1,1,0)} (xe^{xz}, x^2yz).$

Exercício 2.4 Apresente, caso seja possível, um prolongamento contínuo à origem de cada uma das funções definidas por:

a) $f(x,y) = \frac{\text{sen}(x+y)}{x+y};$

b) $f(x,y) = \frac{2(x-1)y^2}{x^2+y^2};$

c) $f(x,y) = \frac{2x^2y}{x^2+3y^2}.$

Exercício 2.5 Estude a continuidade de cada uma das funções definidas por:

a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0); \end{cases}$

d) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0); \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0); \end{cases}$

e) $f(x,y) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq y, \\ y & \text{se } x < y; \end{cases}$

f) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0); \end{cases}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{se } x \neq -y, \\ \frac{x^2}{2} & \text{se } x = -y; \end{cases}$

g) $f(x,y,z) = (\ln(1+y^2), xz, \cos \sqrt[3]{x+y}).$