



Exercício 5.1 Determine equações da reta normal e do plano tangente a cada uma das superfícies dadas, no ponto indicado:

- a) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$, $(1, 1, 1)$; c) $z = x^2 + 3y^3 + \sin(xy)$, $(1, 0, 1)$;
b) $xyz^2 = 1$, $(1, 1, 1)$; d) $e^{xyz} = 1$, $(1, 1, 0)$.

Exercício 5.2 Considere a superfície de nível $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^3 + xyz = 12\}$.

- a) Determine equações da reta normal e do plano tangente a S no ponto $(2, 2, 1)$.
b) Verifique se a reta encontrada na alínea anterior intersesta o eixo Oz .

Exercício 5.3 Sejam $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $A = (-1, 0)$.
 $(x, y) \mapsto x - y^2$

- a) Determine e represente graficamente a curva de nível de f que passa em A .
b) Calcule o vetor $\nabla f(A)$; coloque no esboço efetuada na alínea anterior, um representante de $\nabla f(A)$ com origem em A .
c) Determine uma equação do plano tangente ao gráfico de f em $(A, f(A))$.

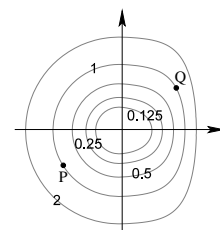
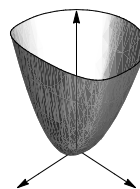
Exercício 5.4 Determine os pontos da curva de equação $x(x^2 + y^2) + 9x^2 + y^2 = 0$ cuja reta tangente é horizontal ou vertical.

Exercício 5.5 Determine os pontos da elipse $2x^2 + y^2 = 1$ cuja reta tangente passa pelo ponto $(1, 1)$.

Exercício 5.6 Determine os pontos da curva $x^2 + y^2 - 2x + xy = 0$ cuja reta normal é paralela à reta $y = x$.

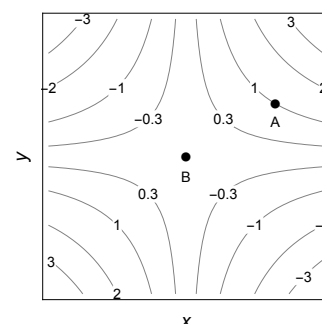
Exercício 5.7 Determine os planos tangentes à esfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ que contêm a reta de equação $\begin{cases} x = 5 - z, \\ y = -5 + 2z. \end{cases}$

Exercício 5.8 Na figura estão representados o gráfico e um diagrama de nível de uma função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Indique quais os sinais de $\nabla f(P) \cdot e_1$ e $\nabla f(Q) \cdot e_2$

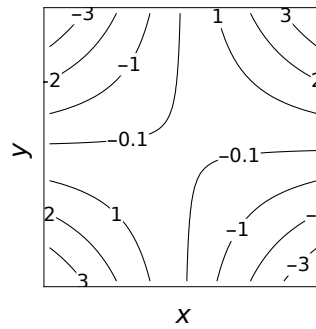


Exercício 5.9 Considere uma função derivável $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Na figura seguinte estão representados os conjuntos de nível -3, -2, -1, -0.3, 0.3, 1, 2 e 3 de f e os pontos A e B .

- a) Indique, justificando, o valor de $f(A)$.
b) Coloque na figura apresentada um representante de $\nabla f(A)$ com origem em A .
c) Sabendo que $f(B) = 0$, sugira um esboço do conjunto de nível que passa no ponto B .



Exercício 5.10 Considere uma função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. A figura seguinte representa as curvas de nível -3, -2, -1, -0.1, 0.1, 1, 2 e 3 de f .



Qual das figuras abaixo pode corresponder à representação do vetor gradiente de f aplicado no ponto indicado? Justifique.

Figura 1

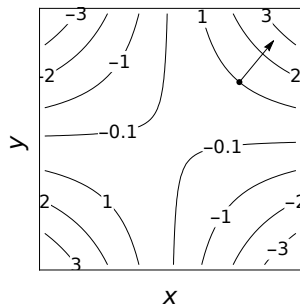


Figura 2

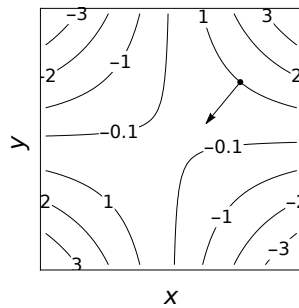
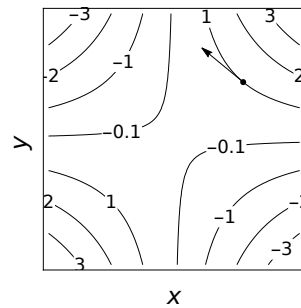
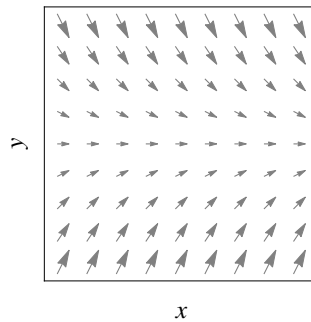


Figura 3



Exercício 5.11 Considere uma função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. A figura abaixo representa, para alguns pontos (x_0, y_0) , o vetor $\nabla f(x_0, y_0)$ aplicado em (x_0, y_0) .



Qual das figuras seguintes pode corresponder à representação de algumas curvas de nível da função f ?

Figura 1

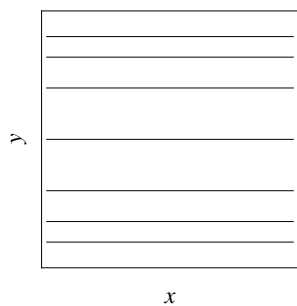


Figura 2

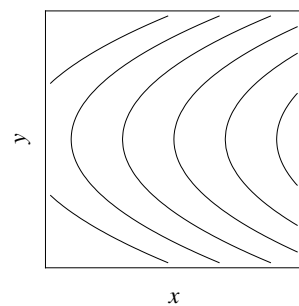


Figura 3

