

2.3)

$$a) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{1}{x^2 y^2} \right) \quad D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 y^2 \neq 0\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \vee y \neq 0\}$$

$$(x=y)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^4} \right) = +\infty \text{ Logo o limite não existe}$$

$$b) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (-1,1,0)} (x e^{xz}, x^2 y z) = (-1, 0)$$

2.4)

$$a) f(x,y) = \frac{\sin(x+y)}{x+y}$$

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \neq 0\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq -y\}$$

$$\bar{f} = \begin{cases} \frac{\sin(x+y)}{x+y}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x+y)}{x+y}$$

$$x+y = \theta$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

$$b) f(x,y) = \frac{2(x-1)y^2}{x^2+y^2}$$

$$f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x,y) \mapsto \frac{2(x-1)y^2}{x^2+y^2}$$

$$\bar{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x,y) \mapsto \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \neq (0,0) \\ ?, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R} \quad (x,y) \mapsto \frac{2(x-1)y^2}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{2(x-1)y}{x^2+y^2} \right)$$

trajetória ($x=0$)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{(0,y)} f(x,y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-2y^2}{y^2} = -2$$

trajetória ($y=0$)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,0)} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x,0) = 0$$

Não é possível ter um prolongamento contínuo de f . //

$$c) f(x,y) = \frac{2x^2y}{x^2+3y^2}$$

$$f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x,y) \mapsto \frac{2x^2y}{x^2+3y^2}$$

$$0 \leq \left| \frac{2x^2y}{x^2+3y^2} \right| = \frac{2x^2|y|}{x^2+3y^2} \leq \frac{2x^2|y|}{x^2} = |2y|$$

$$\bar{f} = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^2+3y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\downarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$$

$$2.5) \quad a) f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x^2y}{x^2+y^2} \right) = 0$. Logo a função é contínua em todo o

$$x, y \rightarrow 0, 0 \text{ com } y = x$$

no domínio $\Downarrow$

$$\left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| = |y| \left| \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right| \leq |y| \quad \textcircled{11}$$

$$\Downarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$$

$$b) f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

trajetória ($x=0$)

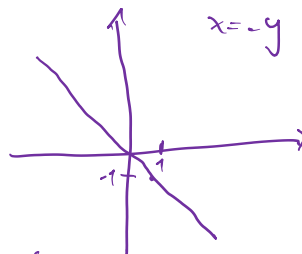
$$\lim_{y \rightarrow 0} -\frac{y^2}{y^2} = -1$$

trajetória ($y=0$)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{x^2} = 3$$

Logo o limite não existe e a função não é contínua no ponto $(0,0)$

$$c) f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{se } x \neq -y \\ \frac{x^2}{2} & \text{se } x = -y \end{cases}$$



$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,-a)} \left(\frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,-a)} \left(\frac{a^2(-a)}{a^2 + (-a)^2} \right) = \left(\frac{-a^3}{2a^2} \right) = \left(-\frac{a}{2} \right)$$

$$-\frac{a}{2} = \frac{a^2}{2} \quad (\Rightarrow) \quad a^2 + a = 0 \quad (\Rightarrow) \quad a = 0 \vee a = -1$$

Logo a função é contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = -y \wedge x \neq 0 \wedge x \neq -1\}$

$$d) f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4} \right) =$$

trajetória ($x=0$)

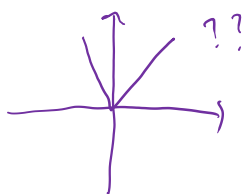
$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{0}{y^4} \right) = 0$$

trajetória ($y=x^2$)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^4}{x^4 + x^6} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1 + x^2} \right) = 1$$

Logo a função é contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$e) f(x,y) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq y \\ y & \text{se } x < y \end{cases}$$



A função é contínua em $\mathbb{R}^2$

Para um ponto genérico (a,a)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,a)} x = a ; \lim_{(x,y) \rightarrow (a,a)} y = a$$

$$f) f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{y^3}{x^2+y^2} \right) = 0$$

$$\left| \frac{y^2}{x^2+y^2} \right| \leq 1$$
$$|y| \left| \frac{y^2}{x^2+y^2} \right| \leq |y|$$

$$\left| \frac{y^3}{x^2+y^2} \right| = |y| \left| \frac{y^2}{x^2+y^2} \right| \leq |y|$$

$\downarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$

A função é contínua em $\mathbb{R}^2$

$$g) f(x,y,z) = (\ln(1+y^2), xz, \cos(\sqrt[3]{x+y}))$$

a função é contínua em $\mathbb{R}^3$

$$f_1(x,y,z) = \ln(1+y^2)$$

$$D_{f_1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1+y^2 > 0\}$$

$1+y^2 > 0$
sempre é
verdade,
logo é contínua em $\mathbb{R}^3$

$$f_2(x,y,z) = xz$$

$$D_{f_2} = \mathbb{R}^3 \quad \checkmark$$