

Exercício 6.1 Determine os pontos críticos de cada uma das funções apresentadas. Averigue se algum deles é ponto extremante, recorrendo apenas ao estudo do comportamento da função em torno de cada ponto crítico.

a) $f(x, y) = x^2 + y^4$;

c) $f(x, y) = xy$;

b) $f(x, y) = 2 - x - y^2$;

d) $f(x, y) = x^2 y^2$.

$$a) f(x, y) = x^2 + y^4: \\ \nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 4y^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Ponto $(0, 0)$

$$f(x, y) \geq 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow f(0, 0) \text{ é mínimo}$$

$$b) f(x, y) = 2 - x - y^2 \\ \nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \quad \text{X}$$

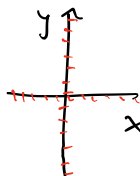
não tem ponto crítico

$$c) f(x, y) = xy \\ \nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$(0, 0)$ = única ponto crítico de f

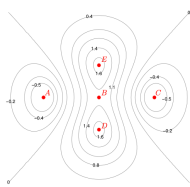
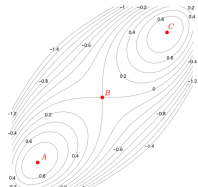
$$d) f(x, y) = x^2 y^2 \\ \nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy^2 = 0 \\ 2x^2y = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow x = 0 \vee y = 0$$



Qualquer ponto da forma $(x, 0)$ e $(0, y)$ é ponto crítico de $f(x, y)$

Exercício 6.2 Em cada uma das figuras são apresentadas curvas de nível de uma função, relativamente à qual os pontos assinalados são pontos críticos. Conjeture sobre a natureza de cada um desses pontos críticos.



$$a) A = \max$$

$$B = \text{sela}$$

$$C = \dots$$

Exercício 6.3 Determine os pontos críticos de cada uma das funções dadas e determine se se está perante um maximizante local, minimizante local ou um ponto de sela:

a) $f(x, y) = x^2 - y^2 + xy$;

k) $f(x, y) = e^x \cos y$;

b) $f(x, y) = xy - x^2 - y^2$;

l) $f(x, y) = xy(1 - x - y)$;

c) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy$;

m) $f(x, y) = (x - y)(xy - 1)$;

d) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 3xy$;

n) $f(x, y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$;

e) $f(x, y) = e^{1+x^2-y^2}$;

o) $f(x, y) = (x + y)(xy + 1)$;

- f) $f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$; p) $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{1-x^2-y^2}$;
 g) $f(x, y) = x^2 - 2xy^2 + y^4 - y^2$; q) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy$;
 h) $f(x, y) = 3x^2 + 2xy + 2x + y^2 + y + 4$; r) $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - x^2 - y^2 - z^2 + 4$;
 i) $f(x, y) = y + x \sin y$; s) $f(x, y, z) = e^{x^2+y^2+z^2}$;
 j) $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$ (analise apenas os pontos críticos $(0, 0)$, $(\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2})$ e $(0, \sqrt{\pi})$).

a) $f(x, y) = x^2 - y^2 + xy$

$\nabla f(0, 0) = (0, 0) \Leftrightarrow (2x + y, -2y + x) = (0, 0)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ -2y + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y = 0 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

$(0, 0)$ pt crítico

Hess $f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 1 = -5$

Logo $(0, 0)$ é ponto de sela

b) $f(x, y) = xy - x^2 - y^2$

$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (y - 2x, x - 2y) = (0, 0)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y - 2x = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ -3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

$(0, 0)$ é único pt. crítico

Hess $f(x, y) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = 4 - 1 = 3$

$(0, 0)$ é máxima local

c) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy$

$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (2x + 2y, 2y + 2x) = (0, 0)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 2y + 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \end{cases}$

$(a, -a)$, $a \in \mathbb{R}$ é pt crítico de f

Hess $f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$ } não podemos tirar conclusão

$f(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy = (x + y)^2$

$f(a, -a) = 0$. Logo todos os pontos $(a, -a)$ são mínimos

q) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy$

$\nabla f(x, y, z) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2y + x = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y = -2x \\ x = -2y \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2y + x = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$(0, 0, 0)$ é o único ponto crítico de f

$$f'' = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta \text{Hess } f(x, y, z) = (-1)^6 \cdot 2 \times \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 \times 3 = 6 \quad \nearrow \underbrace{\lambda_1 \times \lambda_2 \times 2}_{(+)} = 6$$

6.4 Para cada uma das funções f , de classe $\mathcal{C}^2$, que verificam as condições enunciadas, classifique o ponto crítico (x_0, y_0) ou refira se as informações prestadas são insuficientes para a classificação:

- a) $f_{xx}(x_0, y_0) = 9$, $f_{yy}(x_0, y_0) = 4$ e $f_{xy}(x_0, y_0) = 6$;
- b) $f_{xx}(x_0, y_0) = -3$, $f_{yy}(x_0, y_0) = -8$ e $f_{xy}(x_0, y_0) = 2$;
- c) $f_{xx}(x_0, y_0) = -9$, $f_{yy}(x_0, y_0) = 6$ e $f_{xy}(x_0, y_0) = 10$;
- d) $f_{xx}(x_0, y_0) = 25$, $f_{yy}(x_0, y_0) = 8$ e $f_{xy}(x_0, y_0) = 10$.

4)

$$f_{xx}(x_0, y_0) = -3 \quad ; \quad f_{yy}(x_0, y_0) = -8 \quad ; \quad f_{xy}(x_0, y_0) = 10$$

$$\Delta \text{Hess } f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -8 \end{vmatrix} = -24 - 4 = -28. \quad \text{Logo é ponto de sela}$$

6.5 Determine os extremos das funções f definidas a seguir, vinculados pelas condições dadas:

- a) $f(x, y) = \ln(xy)$ e $2x + 3y = 5$;
- b) $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$;
- c) $f(x, y) = xy$ e $x^2 + y^2 = 4$;
- d) $f(x, y) = xy$ e $x + y = 1$;
- e) $f(x, y) = x^3 + y^3$ e $x^2 + y^2 = 1$;
- f) $f(x, y) = x^2 - y^2$ e $x^2 + y^2 = 1$;
- g) $f(x, y) = 2x + y$ e $x^2 + 4y^2 = 1$;
- h) $f(x, y) = xy$ e $9x^2 + y^2 = 4$;
- i) $f(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + 5z^2$ e $2x + 3y + 4z = 12$;
- j) $f(x, y, z) = z$, $x^2 + y^2 = 5 - z$ e $x + y + z = 1$;
- k) $f(x, y, z) = x + 3y + 5z$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;
- l) $f(x, y, z) = x + 2y$, $x + y + z = 1$ e $y^2 + z^2 = 4$;
- m) $f(x, y, z) = 3x - y - 3z$, $x + y - z = 0$ e $x^2 + 2z^2 = 1$.

5

$$f(x, y) = xy \quad ; \quad x^2 + y^2 = 4$$

$$= \{f(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$$

$$\begin{aligned} & \text{Lagrange} \quad \mathcal{L} = \sum_4 \\ & f(x, y) = x^2 + y^2 \end{aligned}$$

$$f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$$

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$$

$$g(x, y) = 4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2\lambda x \\ x = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4\lambda^2 x \\ x(4\lambda^2 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} & \text{caso } x = 0 \quad \int y = 0 \quad \int x^2 = 4 \quad \int y = \pm 2 \quad \int - \\ & \text{caso } x \neq 0 \quad \int x^2 = 4 \quad \int y = \pm x \quad \int - \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} (0, \sqrt{2}) \\ (2, \sqrt{2}) \\ (1, -\sqrt{2}) \\ (1, \sqrt{2}) \end{array} \left| \begin{array}{l} -2 \\ -2 \\ 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \min \\ \max \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x=0 \\ 0=4 \\ x=\pm\sqrt{2} \end{array} \quad \begin{array}{l} x=-\sqrt{4} \\ 2x^2=4 \\ x^2=2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} y=\pm\sqrt{2} \\ x=-\sqrt{2} \\ x=\sqrt{2} \end{array} \quad \begin{array}{l} y=\pm\sqrt{2} \\ x=-\sqrt{2} \\ x=\sqrt{2} \end{array}$$

$$(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}); (-\sqrt{2}, \sqrt{2}); (\sqrt{2}, -\sqrt{2}); (\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

$$f(x, y) = xy$$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x+y=1\}$$

$$(x, y) = x+y \longrightarrow \sum_1^g$$

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \lambda \\ x = \lambda \\ x+y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} y=x=\frac{1}{2} \\ x=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

Exercício 6.7 Encontre o mínimo e o máximo da função f no disco definido pela inequação $x^2 + y^2 \leq 1$, sendo f definida por:

a) $f(x, y) = (x^2 + y^2)^4$; b) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$.

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2$$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$= \overset{\text{f. contínua}}{\underset{\text{f. em } \bar{D}}{\bar{D}}} \cup \partial D, \text{ método multiplicadores de Lagrange}$$

$$f(x, y) = (0, 0) \quad \begin{cases} 2x+y=0 \\ x+2y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-2x=0 \\ x=0 \end{cases}$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} = \sum_1^g$$

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} (x, y) \\ (\dots) \end{array} \quad \begin{array}{l} f(x, y) \\ (\dots) \end{array}$$

Exercício 6.14 Determine o ponto pertencente ao plano definido pela equação $2x - y + 2z = 20$ que se encontra mais próximo da origem.

$$-y + 2z = 20 \hookrightarrow \sum_{z=0}^g$$

$$x, y, z = 2x - y + 2z$$

$$j(x, y, z) = \|(x, y, z) - (0, 0, 0)\|^2 = \|(x, y, z)\|^2 = (\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$j(x, y, z) = (2, -1, 2)$$

$$l(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$$

11

$$a|_{\Sigma_{20}}$$

$$\begin{cases} \nabla d(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2y \\ 2y = -\lambda \\ 2z = 2\lambda \\ 2x - y + 2z = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -\frac{\lambda}{2} = -\frac{x}{2} \\ 2x + \frac{x}{2} + 2x = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} - \\ - \\ 9x = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{40}{9} \\ y = -\frac{20}{9} \\ x = \frac{40}{9} \end{cases} \hookrightarrow \left(\frac{40}{9}, -\frac{20}{9}, \frac{40}{9} \right)$$

Exercício 6.15 Mostre que um paralelepípedo de volume 27 unidades cúbicas, possui superfície mínima se for um cubo.

$$x, y, z) = 27 ; V(x, y, z) = xyz$$

$$\Sigma_{27} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : V(x, y, z) = 27\}$$

$$S(x, y, z) = 2xy + 2yz + 2xz$$

$$\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$a|_{\Sigma_{27}} \rightarrow \begin{cases} \nabla S(x, y, z) = \lambda \nabla V(x, y, z) \\ V(x, y, z) = 27 \end{cases}$$

$$i = (2y + 2z, 2x + 2z, 2y + 2x)$$

$$j = (yz, xz, xy)$$

$$2y + 2z = \lambda yz$$

$$2x + 2z = \lambda xz$$

$$2y + 2x = \lambda xy \quad \Leftrightarrow [\dots]$$

$$xyz = 27$$