



2. Funções de várias variáveis

`fmiranda@math.uminho.pt`

`mif@math.uminho.pt`

2025/2026

2. FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

- ① $n = 1, m = 1$ funções (escalares) reais de uma variável real

Exemplo: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto x^2 + 1$

- ② $n = 1, m > 1$ funções vetoriais de uma variável real

Exemplo: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$
 $x \longmapsto (x, x - 3)$

- ③ $n > 1, m = 1$ funções (escalares) reais de várias variáveis reais

Exemplo: $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \longmapsto x + y$

- ④ $n > 1, m > 1$ funções vetoriais de várias variáveis reais

Exemplo: $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

2.1 FUNÇÕES REAIS DE VÁRIAS VARIÁVEIS REAIS

Seja $\mathcal{D}$ um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ e $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de n variáveis.

$\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ diz-se o **domínio** de f e $f(\mathcal{D}) \subseteq \mathbb{R}$ diz-se o **contradomínio**

Exemplos

► $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2} + 1$

$$\mathcal{D}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}$$

► $g(x, y, z) = \frac{x + 3y - z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$

$$\mathcal{D}_g = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$$

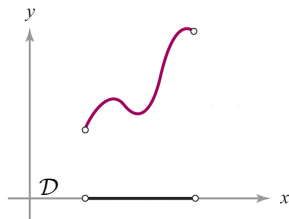
Quando o domínio de f está omissa, subentende-se que este é o maior subconjunto de $\mathbb{R}^n$ onde a expressão analítica que define f tem significado.

O **gráfico** de $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, é o conjunto

$$\text{Gr } f := \{(x_1, \dots, x_n, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{D} \text{ e } y = f(x_1, \dots, x_n)\}$$

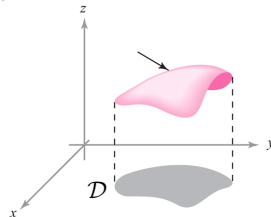
- ▶ Se $n = 1$, o gráfico de f é uma **curva** em $\mathbb{R}^2$;
- ▶ Se $n = 2$, o gráfico de f é uma **superfície** em $\mathbb{R}^3$;
- ▶ Se $n = 3$, o gráfico de f é uma **hipersuperfície** em $\mathbb{R}^4$.

gráfico de f



$n = 1$

gráfico de f



$n = 2$

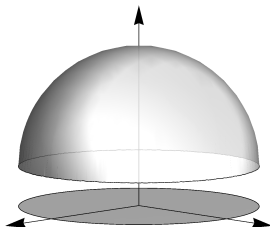
Exemplo Consideremos novamente a função

$$f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2} + 1,$$

cujo domínio já vimos que é

$$\mathcal{D}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}.$$

O gráfico de f é uma semiesfera de raio 3 e centro em $(0, 0, 1)$.



Outra forma de descrever graficamente o comportamento de uma função $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$, consiste em esboçar as curvas

$$f(x, y) = c, \text{ para vários valores constantes } c \in f(\mathcal{D})$$

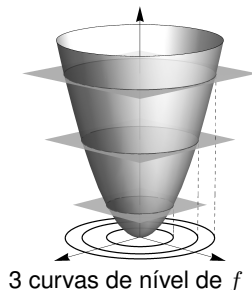
Estas curvas são chamadas **curvas de nível** de f , porque são as projeções verticais no plano xy das curvas nas quais o gráfico de $z = f(x, y)$ intersesta o plano horizontal (nível) $z = c$.

Exemplo

As curvas de nível c ($c \geq 0$) da função

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

são circunferências centradas na origem de raio $\sqrt{c}$.



Se f é uma função de três variáveis, a **superfície de nível c** é o conjunto

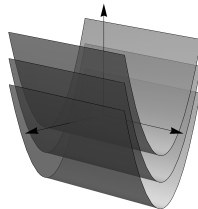
$$\Sigma_c = \{(x, y, z) \in \mathcal{D}_f : f(x, y, z) = c\}$$

Exemplo

As superfícies de nível da função

$$f(x, y, z) = x^2 - z$$

são cilindros parabólicos.



3 superfícies de nível de f

Em geral, a **hipersuperfície de nível c** de uma função de n variáveis é o conjunto

$$\Sigma_c = \{x \in \mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R}^n : f(x) = c\}.$$

2.2 FUNÇÕES VETORIAIS DE VÁRIAS VARIÁVEIS REAIS

A função vetorial de n variáveis reais $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, fica definida por m funções reais de n variáveis reais

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)),$$

com $f_i : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$. As funções f_i são designadas **funções componentes de f** .

Quando não é explicitado, o domínio de f é a interseção dos domínios das suas funções componentes.

Exemplo Seja f a função definida por $f(t) = (\sqrt{t-1}, \sqrt{5-t})$.
As funções componentes de f são:

$$f_1(t) = \sqrt{t-1} \quad \text{e} \quad f_2(t) = \sqrt{5-t}$$

e o domínio de f é

$$\mathcal{D}_f = [1, +\infty[\cap]-\infty, 5] = [1, 5].$$

2.3 LIMITES E CONTINUIDADE

Definição Sejam $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\mathbf{a} \in \mathcal{D}'$. Diz-se que $\ell \in \mathbb{R}$ é o **limite de $f(\mathbf{x})$ quando $\mathbf{x}$ tende para $\mathbf{a}$** e escreve-se

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \ell,$$

se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D} \ 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - \ell| < \varepsilon$



$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ f(B(\mathbf{a}, \delta) \cap \mathcal{D} \setminus \{\mathbf{a}\}) \subseteq B(\ell, \varepsilon).$$

Teorema: *O limite de $f(\mathbf{x})$ quando $\mathbf{x}$ tende para $\mathbf{a}$, se existir, é único.*

- ▶ Para funções de uma variável, dizer que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$$

é dizer que $f(x)$ se aproxima arbitrariamente do número real ℓ , desde que x esteja suficientemente próximo de a .

- ▶ Se $n = 2$, isto é, se f é uma função de duas variáveis¹, então

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = \ell$$

se e só se $f(x, y)$ está arbitrariamente próximo do número real ℓ , desde que (x, y) esteja suficientemente próximo de (a, b) (independentemente do modo como a aproximação de (a, b) se processa).

- ▶ Assim, se encontrarmos duas trajetórias C_1 e C_2 tais que

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (a, b) \\ (x, y) \in C_1}} f(x, y) \neq \lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (a, b) \\ (x, y) \in C_2}} f(x, y),$$

podemos concluir que **não existe** $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$.

¹Se $n > 2$, a situação é análoga.

Exemplo Seja $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$. Calcule, caso exista, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.

- Consideremos que (x, y) se aproxima de $(0, 0)$ ao longo da reta de equação $x = 0$. Então

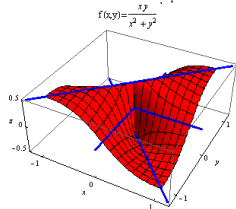
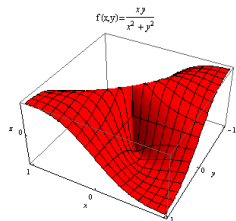
$$\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = 0.$$

- Considerando retas do tipo $y = mx, m \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2}{(1 + m^2)x^2} = \frac{m}{1 + m^2}.$$

O limite anterior depende do valor de m , i.e. para valores de m distintos, obtemos valores diferentes para os limites ao longo das trajetórias.

Logo, não existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.



Exemplo Seja $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$. Calcule, caso exista, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.

- ▶ Limite segundo a reta de equação $x = 0$.

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = 0.$$

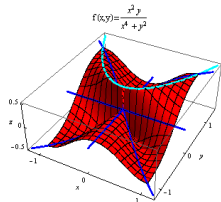
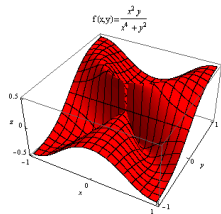
- ▶ Limite segundo retas do tipo $y = mx, m \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^3}{(x^2 + m^2)x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{x^2 + m^2} = 0.$$

- ▶ Limite segundo a parábola de equação $y = x^2$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}.$$

Logo, não existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.



Podemos mostrar, em alternativa ao uso da definição, que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell,$$

usando a técnica de enquadramento descrita no resultado seguinte.

Teorema: *Seja $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ e sejam $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ funções tais que*

$$|f(x) - \ell| \leq g(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0.$$

Então

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell.$$

Exemplo Mostre que, se $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$, então existe

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y).$$

Notemos, por exemplo, que o limite ao longo da reta de equação $x = 0$ é 0. Isto significa que, uma vez que o limite existe, este terá que ser 0.

Usando o teorema anterior e atendendo a que

$$|f(x, y)| = |y| \frac{x^2}{x^2 + y^2} \leq |y|$$

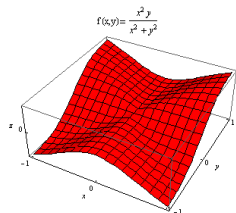
$$\frac{x^2}{x^2 + y^2} \leq 1$$

e

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |y| = 0,$$

concluimos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0.$$



Teorema: *Seja $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ e sejam $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ funções tais que*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell_2.$$

Então:

► $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \ell_1 + \ell_2;$

► $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \ell_1\ell_2;$

► $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell_1}{\ell_2}, \text{ se } \ell_2 \neq 0.$

Definição Sejam $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $a \in \mathcal{D}'$. Diz-se que $\ell \in \mathbb{R}^m$ é o **limite de $f(x)$ quando x tende para a** e escreve-se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell,$$

se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathcal{D} \ 0 < \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - \ell\| < \varepsilon$



$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad f(B(a, \delta) \cap \mathcal{D} \setminus \{a\}) \subseteq B(\ell, \varepsilon).$$

Teorema: Se $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^m$ $a \in \mathcal{D}'$ e $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_m)$ então

$$x \mapsto (f_1(x), \dots, f_m(x))$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f_i(x) = \ell_i, \ i = 1, \dots, m.$$

Exemplo Considere a função definida por $f(x, y, z) = (xe^{xz}, x^2yz)$. Como

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (-1,1,0)} xe^{xz} = -1 \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y,z) \rightarrow (-1,1,0)} x^2yz = 0,$$

então

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (-1,1,0)} f(x, y, z) = (-1, 0).$$

Definição Uma função $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, diz-se **contínua** num ponto $a \in \mathcal{D}$ se a é um ponto isolado ou

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Uma função f diz-se **contínua**, se for contínua em todos os pontos do seu domínio.

Os resultados relativos à soma, produto e composta de funções contínuas de uma variável, são extensíveis, de forma natural, a funções de duas ou mais variáveis.

Exemplos

► A função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

não é contínua na origem, porque não existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$

(ver p. 12).

► A função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

é contínua na origem, porque

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$$

(ver p.14).