



Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática

4. Extremos absolutos, locais e condicionados de funções escalares

`fmiranda@math.uminho.pt`

`mif@math.uminho.pt`

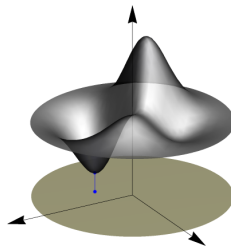
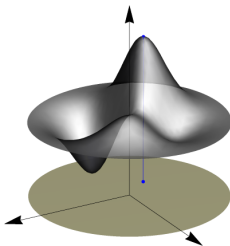
2025/2026

MÁXIMOS E MÍNIMOS

Seja $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a \in \mathcal{D}$.

Definição Diz-se que f tem um

- ▶ **máximo (absoluto)** no ponto a , se $f(x) \leq f(a)$, $\forall x \in \mathcal{D}$; o ponto a diz-se **ponto de máximo**
- ▶ **mínimo (absoluto)** no ponto a , se $f(x) \geq f(a)$, $\forall x \in \mathcal{D}$; o ponto a diz-se **ponto de mínimo**

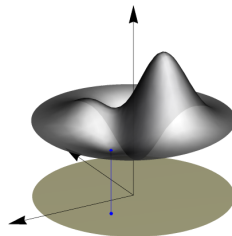
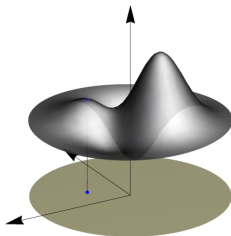


MÁXIMOS E MÍNIMOS LOCAIS

Seja $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a \in \mathcal{D}$.

Definição Diz-se que f tem um

- ▶ **máximo local** ou **relativo** no ponto a , se existir uma vizinhança V de a tal que $f(x) \leq f(a)$, $\forall x \in V \cap \mathcal{D}$; o ponto a diz-se **ponto de máximo local**
- ▶ **mínimo local** ou **relativo** no ponto a , se existir uma vizinhança V de a tal que $f(x) \geq f(a)$, $\forall x \in V \cap \mathcal{D}$; o ponto a diz-se **ponto de máximo local**



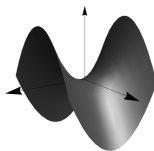
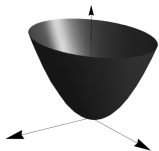
PONTOS CRÍTICOS

Definição Um ponto $a \in \mathcal{D}$ diz-se um **ponto crítico** de f se $\nabla f(a) = 0$ ou $\nabla f(a)$ não existe.

Exemplos: As funções $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ e $g(x, y) = x^2 - y^2$ têm um único ponto crítico: $(0, 0)$.

Como $f(x, y) \geq f(0, 0) = 0$, então $(0, 0)$ é um **ponto de mínimo** de f .

Como $g(x, 0) > g(0, 0) = 0$, para $x \neq 0$ e $g(0, y) < g(0, 0) = 0$, para $y \neq 0$, no ponto crítico $(0, 0)$ a função **não tem máximo nem mínimo local**.



Definição Um ponto crítico de uma função f diz-se um **ponto de sela** se não é ponto de máximo nem ponto de mínimo de f .

Teorema: *Seja $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}$. Se:*

- *f tem um extremo local em a ,*
- *todas as derivadas parciais de f em a existem,*

então a é um ponto crítico de f .

Observação:

- ▶ Note-se que o recíproco do resultado anterior não é válido. Um ponto interior a pode ser um ponto de sela de f .
- ▶ Se a não for um ponto interior de $\mathcal{D}$, o resultado não é válido. A função f pode ter um extremo local num ponto que não é ponto crítico.

MATRIX HESSIANA

Definição Seja $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função nas variáveis $x_1, \dots, x_n$, de classe $\mathcal{C}^2$. A **matriz hessiana** de f em a é a matriz $n \times n$

$$\mathcal{H}f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}$$

Observação: A matriz hessiana é uma matriz simétrica. **Porquê?**

Exemplo: Se $f(x, y) = x^3y + x^2y + y^4$, então

$$\mathcal{H}f(1, -1) = \begin{pmatrix} -8 & 5 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$$

TESTE PARA EXTREMOS LOCAIS

Denotemos por $\mathcal{H}_k$, $k = 1, \dots, n$ os menores principais de $\mathcal{H}f(a)$, isto é

$$\mathcal{H}_1 = \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) \right|, \mathcal{H}_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) \end{vmatrix}, \dots, \mathcal{H}_n = |\mathcal{H}f(a)|$$

Teorema: *Sejam $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^2$ e $a \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}$ um ponto crítico de f tal que $\mathcal{H}_n \neq 0$. Se*

- ▶ *todos os determinantes $\mathcal{H}_k$ forem **positivos**, f tem um **mínimo local** em a ;*
- ▶ *os determinantes $\mathcal{H}_k$ tiverem **sinais alternados** (começando com $\mathcal{H}_1 < 0$), f tem um **máximo local** em a ;*
- ▶ *nenhuma das situações anteriores ocorrer, a é um **ponto de sela**.*

Corolário: Sejam $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função nas variáveis x, y , de classe $\mathcal{C}^2$ e $a \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}$ um ponto crítico de f tal que $|\mathcal{H}f(a)| \neq 0$. Se

- ▶ $|\mathcal{H}f(a)| > 0$ e $f_{xx}(a) > 0$, então tem um **mínimo local** em a ;
- ▶ $|\mathcal{H}f(a)| > 0$ e $f_{xx}(a) < 0$, então f tem um **máximo local** em a ;
- ▶ $|\mathcal{H}f(a)| < 0$, então a é um **ponto de sela**.

Se $|\mathcal{H}f(a)| = 0$ nada se pode concluir a partir do resultado anterior.

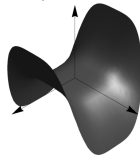
Exemplos: Em cada um dos seguintes casos, tem-se $|\mathcal{H}f(0,0)| = 0$:

$$f(x, y) = x^4 + y^4$$



$(0, 0)$ é um ponto de mínimo de f

$$g(x, y) = y^4 - x^4$$

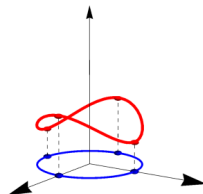
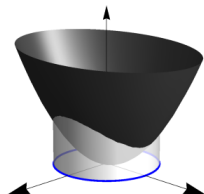


$(0, 0)$ é ponto de sela de g

MÁXIMOS E MÍNIMOS CONDICIONADOS

Problema: Calcular os máximos e mínimos de uma função f restrita a um conjunto S .

Exemplo: Se $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ e $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, então $f|_S$ atinge o valor máximo 2 nos pontos $(0, -1)$ e $(0, 1)$ e o valor mínimo 1 nos pontos $(1, 0)$ e $(-1, 0)$.



Existência de máximo e mínimo: Seja $\mathcal{D}$ um conjunto fechado e limitado em $\mathbb{R}^n$ e seja $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então existe máximo e mínimo de f .

MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Teorema de Lagrange Sejam $f, g : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funções de classe $\mathcal{C}^1$. Seja $a \in \mathcal{D}$ um ponto tal que $g(a) = c$ e $\nabla g(a) \neq \mathbf{0}$. Se S é a curva de nível c da função g e $f|_S$ tem um extremo em a , então existe um número real λ tal que

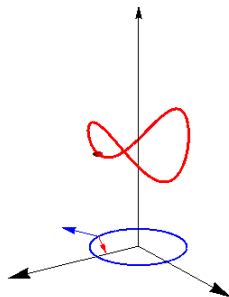
$$\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a).$$

O número λ chama-se **multiplicador de Lagrange**.

O teorema anterior diz que se a é um ponto de extremo de $f|_S$, então satisfaz

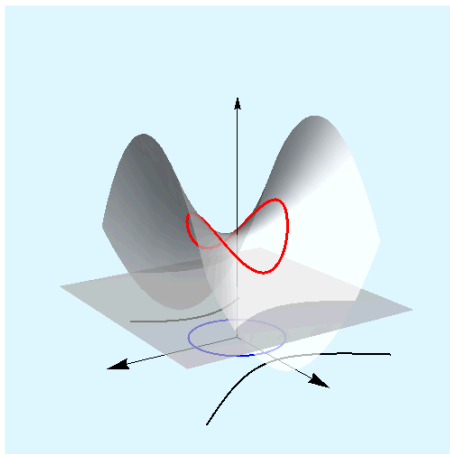
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(a) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(a) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a) = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(a) \\ g(a) = c \end{cases}$$

GEOMETRICAMENTE:



os pontos de extremo de $f|_S$ são os pontos onde os gradientes de f e g são colineares

GEOMETRICAMENTE:



os pontos de extremo de $f|_S$ são os pontos onde as curvas de nível de f são tangentes à curva de nível c de g

O Teorema de Lagrange apenas fornece **candidatos** a pontos de extremo de $f|_S$. Se S for fechado e limitado, então $f|_S$ tem máximo e mínimo (ver resultado da página 9) e os pontos de extremo de $f|_S$ obtêm-se avaliando a função f nos candidatos obtidos pelo método dos multiplicadores de Lagrange (MML).

Extremos condicionados de funções de mais de duas variáveis

A extensão método dos multiplicadores de Lagrange a funções de n variáveis é imediata.

Extremos de funções sujeitas a várias restrições

$$g_1(x, y) = c_1, g_2(x, y) = c_2 \dots, g_k(x, y) = c_k$$

$$\nabla f(a) = \lambda_1 \nabla g_1(a) + \lambda_2 \nabla g_2(a) + \dots + \lambda_k \nabla g_k(a).$$

MÁXIMOS E MÍNIMOS ABSOLUTOS EM $\mathcal{D}$

Se $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e $\mathcal{D}$ é um conjunto **fechado** e **limitado**, está garantida a existência de máximo e mínimo absolutos em $\mathcal{D}$ (ver resultado da página 9).

Estes extremos podem ocorrer no interior ou na fronteira de $\mathcal{D}$. Se ocorrem em $\overset{\circ}{\mathcal{D}}$, então são pontos críticos; se ocorrem em $\partial\mathcal{D}$, podem ser obtidos pelo MML.

Cálculo dos extremos em $\mathcal{D}$ (fechado e limitado)

- ▶ calcular os pontos críticos de f ; consideram-se apenas os que estão em $\mathcal{D}$;
- ▶ calcular os pontos de máximo e mínimo de f na fronteira, i.e. em $f|_{\partial\mathcal{D}}$;
- ▶ calcular o valor de f nesses pontos; o maior deles é o máximo; o menor é o mínimo.